

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательно краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставаемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф.м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф.м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохри-ну (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015–2016 учебном году
9 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

9.1. У разбойников 13 слитков золота. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес двух любых слитков. Придумайте, как за 8 взвешиваний выяснить суммарный вес всех 13-и слитков.

Решение: За 5 взвешиваний определяем суммарный вес любых 10 слитков (взвешивая их попарно). Пусть он равен T , а веса трёх оставшихся слитков равны A , B и C . Последними тремя взвешиваниями найдём числа

$$x = A + B, \quad y = B + C, \quad z = C + A.$$

Тогда суммарный вес всех слитков, равный $T + A + B + C = T + \frac{x + y + z}{2}$, находится без дополнительных взвешиваний. Задача решена.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный алгоритм определения суммарного веса слитков	7 баллов
Показано, как за три взвешивания определить вес трёх любых слитков (при отсутствии дальнейших продвижений)	4 балла
Неверные алгоритмы (в любом количестве)	0 баллов

9.2. Учительница Мария Ивановна готовит для урока математики задание. Она хочет в уравнении $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c}$ вместо букв a , b и c поставить три различных натуральных числа так, чтобы оба корня уравнения оказались различными целыми числами. Помогите ей.

Решение: Приведём один из возможных способов. Пусть $x_1 = 0$ будет корнем уравнения. Тогда числа a , b и c удовлетворяют равенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, то есть равенству $ac + bc = ab$. Исходное уравнение равносильно (при $x \neq -a$ и $x \neq -b$) следующему:

$$c(x + a + x + b) = (x + a)(x + b) \Leftrightarrow x^2 + (a + b - 2c)x = 0;$$

его второй корень будет равен $2c - a - b$. Положив, например, $a = 6$, $b = 3$ и $c = 2$, получим $x_2 = -5$. Значит, такая тройка нас полностью устраивает.

Примечание 1: В качестве тройки чисел a , b , c подойдёт любая тройка различных натуральных чисел, удовлетворяющая равенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, так как в этом

случае не могут выполняться равенства $x_2 = -a$ и $x_2 = -b$ (легко проверить, что выполнение любого из них приведёт к неверному равенству $a = b$).

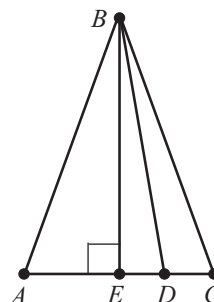
Примечание 2: При других способах решения можно положить x_1 равным не 0, а любому другому целому числу. Подходящая тройка чисел a , b , c обязательно найдётся; рассуждения будут аналогичными.

Ответ: Например, так $\frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведён верный пример тройки (a, b, c) и имеется доказательство, что она удовлетворяет всем условиям задачи	7 баллов
Приведён верный пример тройки (a, b, c) , но не проверено (нет доказательства), что она удовлетворяет всем условиям задачи	4 балла
Имеются верные и доказанные утверждения о структуре троек (a, b, c) , не приведшие, однако, к решению	не более 2 баллов
Найдены тройки (a, b, c) , которые удовлетворяют не всем требованиям (например, оказалось, что один из корней не целый)	0 баллов

9.3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC со стороной $AB = 19$ отметили точку D . Найдите значение выражения $BD^2 + AD \cdot CD$.



К решению задачи 9.3 Тогда

Решение: Пусть точка E — середина стороны AC . Без ограничения общности будем считать, что точка D лежит на отрезке EC — см. рисунок. Заметим, что $AD - ED = AE = CE = DC + ED$, откуда $2ED = AD - DC$.

Запишем теорему Пифагора для прямоугольных треугольников BED и BEC . Получим систему

$$\begin{cases} BE^2 = BD^2 - ED^2, \\ BE^2 = BC^2 - (ED + DC)^2. \end{cases}$$

$$D^2 - ED^2 = BC^2 - (ED + DC)^2 \Leftrightarrow BD^2 + DC^2 + 2ED \cdot DC = BC^2.$$

Так как $2ED = AD - DC$, отсюда следует, что $BD^2 + AD \cdot CD = BC^2 = 361$.

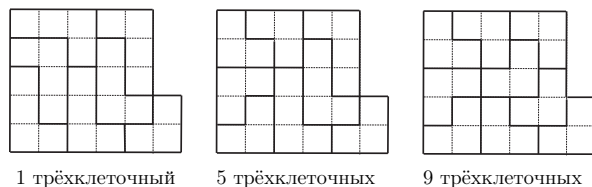
Ответ: 361.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ответ неверен исключительно из-за арифметической ошибки	6 баллов
Верно выписана система уравнений, из которой можно найти нужную величину, но эта величина не найдена	4 балла
Верно разобраны частные случаи, например, если точка D — середина стороны AC или треугольник ABC равносторонний и т. п.	2 балла
Ответ без обоснования	0 баллов

9.4. Незнайка разрезал изображённую на рисунке фигуру по линиям сетки на трёхклеточные и четырёхклеточные уголки (они изображены справа, и могут располагаться в фигуре и в поворнутом, и в перевёрнутом виде). Сколько трёхклеточных уголков могло получиться у Незнайки? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение: Пусть у Незнайки получилось n трёхклеточных уголков. Они занимают площадь, равную $3n$ (в клетках). Оставшаяся площадь фигуры $27 - 3n$ распределена по четырёхклеточным уголкам, поэтому она делится на 4 нацело. Но это возможно, как легко проверить (например, перебором) только при $n = 1$, $n = 5$ или $n = 9$. Приведённые примеры разрезов показывают, что все три ситуации возможны.



Ответ: Один, пять или девять.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Обосновано, что число уголков может равняться только 1, 5 и 9, но приведены примеры лишь для двух случаев	5 баллов
Обосновано, что число уголков может равняться только 1, 5 и 9, но приведён пример лишь для одного случая	4 баллов
Обосновано, что число уголков может равняться только 1, 5 и 9, но не приведено никаких примеров	3 балла
Приведены все три примера (для 1, 5 и 9 уголков), но нет доказательства, что другие случаи невозможны	2 балла
Приведены верные примеры, но не для всех случаев и нет доказательства, что другие случаи невозможны	1 балл

9.5. Вовочка задумал два натуральных числа A и B . Затем он на калькуляторе нашёл их сумму $S_1 = A + B$ и произведение $P_1 = A \cdot B$. Потом (снова на калькуляторе) он нашёл сумму $S_2 = S_1 + P_1$ и произведение $P_2 = S_1 \cdot P_1$. Аналогично, по числам S_2 и P_2 Вовочка нашёл числа S_3 и P_3 , по числам S_3 и P_3 — числа S_4 и P_4 и т. д. вплоть до чисел S_{100} и P_{100} . (На калькуляторе Вовочка считает безошибочно.) Маша не знает ни числа A , ни числа B , ни одного из двухсот полученных Вовочкой чисел, однако утверждает, что может точно определить чётность некоторых 99-и из них. Докажите, что Маша права.

Решение: Покажем, что среди чисел S_1 и P_1 есть чётное. Действительно, если среди чисел A и B есть чётные, то чётным будет число P_1 . Если же они оба нечётны, то чётным будет число S_1 . Во всех случаях число $P_2 = S_1 \cdot P_1$ будет чётным. Далее чётным будет число $P_3 = S_2 \cdot P_2$, число $P_4 = S_3 \cdot P_3$ и вообще все числа P_i , где $2 \leq i \leq 100$. Итак, у Вовочки всегда будут чётными 99 чисел ($P_2, P_3, \dots, P_{100}$), что доказывает правоту Маши.

Примечание: Пара примеров $A = B = 1$ и $A = B = 2$ показывают, что чётность остальных чисел определить нельзя: в первом и втором случаях все они имеют

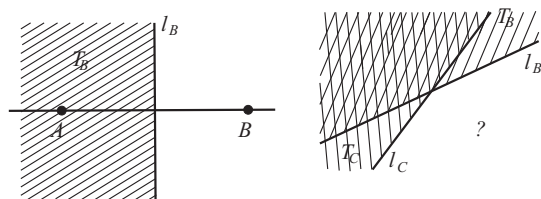
разную чётность.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Доказана чётность всех чисел $P_2, P_3, \dots, P_{100}$	7 баллов
Чётность чисел $P_2, P_3, \dots, P_{100}$ доказана не при всех допустимых парах (A, B)	3 балла
Утверждается, что Маша может определить чётность хотя бы одного числа, не входящего в множество $\{P_2, P_3, \dots, P_{100}\}$	0 баллов

9.6. Про три точки A, B и C известно, что для любой четвёртой точки M расстояние от A до M не превосходит хотя бы одного из расстояний BM или CM . Докажите, что точка A лежит на отрезке BC .

Решение: Рассмотрим множество точек M , для которых выполняется неравенство $AM \leq BM$. Оно представляет собой полуплоскость, границей которой является прямая l_B — серединный перпендикуляр к отрезку AB . Обозначим это множество через T_B и заметим, что $B \notin T_B$ (см. рисунок слева). Аналогично через T_C обозначим полуплоскость с границей l_C , состоящую из всех точек, расположенных ближе к A , чем к C или на равном расстоянии от этих точек. Нам известно, что объединение $T_B \cup T_C$ содержит все точки плоскости. Если прямые l_B и l_C не параллельны, то плоскость разбивается ими на четыре непустых подмножества, при этом точки одного из них не принадлежат ни множеству T_B , ни множеству T_C (см. рисунок справа). Такая ситуация не соответствует условию, значит $l_B \parallel l_C$. Это значит, то прямые AB и AC параллельны (перпендикуляры к параллельным прямым), то есть это — одна и та же прямая. Итак, точка A лежит на прямой BC .



К решению задачи 9.6

Из трёх точек на прямой A, B и C ровно одна лежит между двумя другими. Если это — точка C , то точка B не принадлежит множеству T_C , значит (так как $B \notin T_B$), не принадлежит и множеству $T_B \cup T_C$, что невозможно. Аналогично, невозможен случай, когда точка C лежит между точками A и B . Значит, именно точка A лежит между точками B и C , то есть не на отрезке BC . Утверждение доказано.

Примечание 1: Нетрудно показать, что для всякой точки отрезка AB условие задачи выполнено.

Примечание 2: Справедливость утверждения не зависит от того, рассматриваются ли в качестве точек M только точки плоскости ABC или всего пространства. Доказательство остаётся таким же, только вместо слова «полуплоскость» следует везде писать слово «полупространство».

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верно рассмотрен случай, когда точки A, B и C не лежат на одной прямой, а случай, когда они на одной прямой не разобран	4 балла
Верно рассмотрен случай, когда точки A, B и C лежат на одной прямой (случай общего расположения не проанализирован)	3 балла
Доказано (при отсутствии решения), что для всех точек отрезка AB условие задачи выполнено	2 балла
Указано, что ГМТ M таких, что $AM \leq BM$ — полуплоскость с границей, являющейся серединным перпендикуляром к отрезку AB	1 балл
Иллюстрация задачи конкретными примерами (в любом количестве)	0 баллов